Histoires hédonistes de groupes et géométrie — Caldero

Étude de $O(p;q)$

171 158 208
106 150 155
156 170 169

Proposition : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Définition : Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. On note $O(p;q)$ le sous-groupe de $GL_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique $q : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_{p+q}) \mapsto x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 \end{array}$ de signature $(p;q)$ dont la matrice dans la base canonique est : $I_{(p;q)} := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $O(p;q) = \{ M \in GL_{p+q}(\mathbb{R}) \mid M I_{(p;q)} {}^tM = I_{(p;q)} \}$

Théorème : Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$.
Alors : $O(p;q)$ et $O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ sont homéomorphes

Preuve :

Soit $M \in O(p;q) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ avec $n = p+q$.
Par le théorème de décomposition polaire, il existe $O, S \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $M = OS$

■ Mq : $S, O \in O(p;q)$

Soit $T = {}^tMM$ d'où : $T = S^2$

- Rq : $O(p;q)$ est stable par transposition

$M \in O(p;q)$ donc $M I_{(p;q)} {}^tM = I_{(p;q)}$
donc ${}^tM^{-1} I_{(p;q)} M^{-1} = I_{(p;q)}$
donc ${}^tM^{-1} \in O(p;q)$
donc ${}^tM \in O(p;q)$ (c'est un groupe)

- Rq : $S \in O(p;q)$

Ainsi, $T = {}^tMM \in O(p;q)$ et alors $S^2 \in O(p;q)$
Comme $T \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $T = \exp(U)$ avec $U \in S_n(\mathbb{R})$
Ainsi,

$T \in O(p;q)$ ssi $T I_{(p;q)} {}^tT = I_{(p;q)}$
ssi ${}^tT = I_{(p;q)} T^{-1} I_{(p;q)}$
ssi ${}^t\exp(U) = I_{(p;q)} \exp(U)^{-1} I_{(p;q)}$
ssi $\exp({}^tU) = I_{(p;q)} \exp(-U) I_{(p;q)}$
ssi $\exp({}^tU) = \exp(-I_{(p;q)} U I_{(p;q)})$ $\sum_0^{+\infty} \frac{(-I_{(p;q)} U I_{(p;q)})^k}{k!} = \sum_0^{+\infty} \underbrace{I_{(p;q)}^k}_{(-1)^k I_{(p;q)}} \frac{(-U)^k}{k!} \underbrace{I_{(p;q)}^k}_{(-1)^k I_{(p;q)}} = I_{(p;q)} \left(\sum_0^{+\infty} \frac{(-U)^k}{k!} \right) I_{(p;q)}$ par continuité de la multiplication matricielle
ssi ${}^tU = U = -I_{(p;q)} U I_{(p;q)}$ (car exp bij)
ssi $U I_{(p;q)} + I_{(p;q)} U = 0$
ssi $\frac{U}{2} I_{(p;q)} + I_{(p;q)} \frac{U}{2} = 0$
ssi $\frac{{}^tU}{2} = -I_{(p;q)} \frac{U}{2} I_{(p;q)}^{-1}$
ssi $\exp\left(\frac{{}^tU}{2}\right) = \exp\left(-I_{(p;q)} \frac{U}{2} I_{(p;q)}^{-1}\right)$
ssi ${}^t\exp\left(\frac{U}{2}\right) = I_{(p;q)} \exp\left(\frac{U}{2}\right)^{-1} I_{(p;q)}^{-1}$

Or : $\exp\left(\frac{U}{2}\right) \in S_n(\mathbb{R})$ et $\exp^2\left(\frac{U}{2}\right) = \exp(U) = T$.
Alors $\exp\left(\frac{U}{2}\right) = S$ et $S I_{(p;q)} {}^tS = I_{(p;q)}$ ie $S \in O(p;q)$
et alors $O = MS^{-1} \in O(p;q)$.

Ainsi, la décomposition polaire $M = OS \mapsto (O, S)$ induit une bijection bicontinue entre : $O(p;q)$ et : $O(p;q) \cap O(n) \times O(p;q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})$.

■ Mq : $O(p;q) \cap O(n) \simeq O(p) \times O(q)$

Soit $O \in O(p;q) \cap O(n)$ tq : $O = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$. $A \in M_p(\mathbb{R})$

Ainsi, $O \in O(p;q)$ donc $\begin{cases} {}^tAA - {}^tBB = I_p \\ {}^tAC - {}^tBD = 0 \\ {}^tCA - {}^tDB = 0 \\ {}^tCC - {}^tDD = -I_q \end{cases}$ (*)

$I_{(p;q)}, O \in O(n)$ donc : $(O I_{(p;q)}) \in O(n)$

$O I_{(p;q)} = \begin{pmatrix} A & -C \\ B & -D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ -B & -D \end{pmatrix} = {}^tI_{(p;q)} {}^tO = I_{(p;q)} O$

Alors $B = C = 0$ et de (*), $A \in O(p)$ et $D \in O(q)$

d'où : $O(p;q) \cap O(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid A \in O(p), D \in O(q) \right\} \simeq O(p) \times O(q)$

■ Rq : $O(p;q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pq}$

D'une part, $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Par ailleurs, on a vu que $\exp : L := \{ U \in S_n(\mathbb{R}) \mid U I_{(p;q)} + I_{(p;q)} U = 0 \} \to O(p;q)$

Ainsi, les espaces $L \cap S_n(\mathbb{R})$ et $O(p;q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont homéomorphes

Soit $U = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix} \in L \cap S_n(\mathbb{R})$, $A \in S_p(\mathbb{R})$, $C \in S_q(\mathbb{R})$, $B \in M_{q,p}(\mathbb{R})$

Alors : $0_n = \underbrace{\begin{pmatrix} A & -B \\ {}^tB & -C \end{pmatrix}}_{U I_{(p;q)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ -{}^tB & -C \end{pmatrix}}_{I_{(p;q)} U} = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & -2C \end{pmatrix}$

d'où : $A = C = 0$ et alors $U = \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}$ d'où : $L \cap S_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pq}$

Or : $\dim(M_{q,p}(\mathbb{R})) = pq$
et alors $O(p;q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pq}$.

Finalement, $O(p;q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.

Temps:
11' 58" speechnotes
11' 31" speechtexter